

Derivadas

Definición:

Sea una función continua f , y su expresión $f(x)$, la derivada de f se escribe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

o

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \text{ con } h = \Delta x$$

Bajo esta definición se da lo siguiente:

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante.

- $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$

Ejemplos:

$$f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^{4-1} = 12x^3 \qquad f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot x^{7-1} = 7x^6$$

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{1/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Ejemplos:

$$f(x) = 3x^5 + 8x^2 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3x^{5-1} + 2 \cdot 8x^{2-1} = 15x^4 + 16x$$

$$f(x) = x^2 + 9 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 2x$$

- $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x) = 3x \cdot 5x^3 \Rightarrow f'(x) &= (1 \cdot 3x^{1-1}) \cdot (5x^3) + (3x) \cdot (3 \cdot 5x^{3-1}) = (3) \cdot (5x^3) + (3x) \cdot (15x^2) \\ &= 15x^3 + 45x^2 \end{aligned}$$

- $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x) \cdot (5x) - (x^2) \cdot (5)}{(5x)^2} = \frac{10x^2 - 5x^2}{25x^2} = \frac{5x^2}{25x^2} = \frac{1}{5}$$

- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$

Ejemplo:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = \ln(e) \cdot e^x = (1) \cdot e^x = e^x$$

$$f(x) = 8^x \Rightarrow f'(x) = \ln(8) \cdot 8^x$$

- $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Ejemplo:

$$f(x) = \ln(x) = \log_e(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(e)} = \frac{1}{x \cdot (1)} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_2(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}$$

- $f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$

Y como $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow \tan'(x) = \frac{\text{sen}'(x) \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) \cdot \cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) \cdot (-\text{sen}(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= \frac{(\cos(x))^2 + (\text{sen}(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$